

目 次

はしがき Ⅰ

1 序 3

- 1.1 不完全性定理とは 3
- 1.2 ゲーデルの人生と仕事 7
- 1.3 本書の構成 11

2 不完全性定理 総論 13

- 2.1 算術の問題 13
 - 算術の問題の論理的特性 16
- 2.2 第一不完全性定理 20
 - 形式体系とは 23
 - 否定について 25
 - 形式体系と計算可能性理論 27
 - 無矛盾性とは 29
 - 「ある程度の算術」とは何か 31
- 2.3 第一不完全性定理の限界 33
 - 「証明できない真理」がある？ 33
 - 完全な形式体系もある 35
 - 完全性定理の「完全」とは 36
 - 決定不能な非算術的言明の存在について 38
- 2.4 第一不完全性定理と数学的真理 39
 - 真理と決定不能性 39
 - 「真である」ことについての哲学的疑念 40
 - 「 S で真である」という不可解な意見 44

2.5	第一不完全性定理とヒルベルトのノン・イグノラビムス	46
2.6	第二不完全性定理	48
	Con _g の証明	50
	第二不完全性定理とヒルベルトのプログラム	53
2.7	不完全性定理の証明	55
	ゲーデルの証明	56
	ロッサー文	60
	タルスキの定理	60
	どこまで「自己言及的」か？	62
	計算可能性理論を用いた第一不完全性定理の証明	65
	不完全性定理の弱い変種	67
	第二不完全性定理の証明	67
2.8	「ポストモダンの状況」とは？	70
2.9	心 対 コンピュータ	77
2.10	その後の発展	79

3 計算可能性, 形式体系, 不完全性 81

3.1	記号列の扱い	81
3.2	計算的枚挙可能性と決定可能性	84
	計算的枚挙可能集合とは	84
	計算的決定可能集合とは	87
	数学的に定義可能な集合だけを扱う	89
	ゲーデル数化	90
3.3	決定不能集合	91
	2つの基本的関係	91
	決定不能性定理	93
	チューリングの決定不能性定理の証明	94
	ポストの単純集合	96
	ヒルベルトの第10問題とMRDP定理	97
3.4	計算可能性と第一不完全性定理	99
	形式体系	99
	第一不完全性定理	101
	本質的決定不能性と加速証明	104

4 不完全性はどこにでも 107

- 4.1 数学の外の不完全性定理 107
- 4.2 「人間の思考」と不完全性定理 111
- 4.3 一般化されたゲーデル文 116
 - 数学的な一般化の例 116
 - 非数学的な一般化の例 117
- 4.4 不完全性と TOE (万物理論) 120
- 4.5 神学的応用 125

5 数学に関する懐疑と信頼 133

- 5.1 第二不完全性定理の主張と注意点 133
 - 定理の発見 133
 - いくつかの結論 138
 - 自らの無矛盾性をほぼ証明する理論 142
- 5.2 懐疑主義 143
 - ゲーデルの定理は疑念と無関係 145
 - 「有限の立場」の伝統 146
- 5.3 無矛盾性証明 147
 - ZFC の無矛盾性の証明 149
 - PA の健全性を証明する 150
 - 懐疑論の視点 153
- 5.4 無尽蔵 155

6 ゲーデル, 心, コンピュータ 159

- 6.1 ゲーデルと UTM (万能真理機械) 159
- 6.2 ペンローズの「第二論法」 165
- 6.3 「無尽蔵」の再考 168
- 6.4 自分の心を理解すること 172
 - 「体系の外に出る」とは 175

7 ゲーデルの完全性定理 177

7.1	1 階論理と完全性	177
	1 階論理の論理的帰結とは	179
	論理規則の健全性と完全性	181
7.2	1 階理論としての PA	183
	プレスバーガー算術	185
	理論の無限木と無矛盾性証明	185
	「標準モデルで真である」という言い方について	186
7.3	不完全性と超準モデル	187

8 不完全性, 複雑さ, 無限大 191

8.1	不完全性と複雑さ	191
	チャイティンの不完全性定理	192
	複雑性で不完全性が解釈できるか	199
8.2	不完全性とランダム性	202
8.3	不完全性と無限大	208
	さまざまな不完全性	208
	ゲーデル的關係	211
	パリス = ハーリントンの定理	213
	その後の発展	214

A. 補遺 217

A.1	初等算術の言語	217
A.2	第一不完全性定理	219
A.3	ゴールドバッハ類の言明, Σ 論理式, 計数的枚挙可能関係	223

参考文献	226
訳者あとがき	229
索引	237